التوابع التوافقية

إذا كان $f(z)=u+iv$ تابعاً تحليلياً في منطقة ما D من المستوي العقدي، عندئذٍ يكون شرطي كوشي–ريمان محققين من أجل أي نقطة من D أي:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

فإذا كانت المشتقات الجزئية من المرتبة الثانية للتوابع u,v موجودة فإننا نستنتج باشتقاق المعادلتين السابقتين أن:

$$\frac{\partial 2u}{\partial x^2}=\frac{\partial 2v}{\partial y\partial x} \quad , \quad \frac{\partial 2u}{\partial y^2}=-\frac{\partial 2v}{\partial x\partial y}$$

بما أن التابع $f(z)$ تحليلياً فإن المشتقات الجزئية للتابعين u,v من جميع المراتب تكون موجودة وهي توابع مستمرة بالنسبة لـ x,y.

بجمع الطرفين في العلاقتين السابقتين:

$$\frac{\partial 2u}{\partial x^2}+\frac{\partial 2u}{\partial y^2}=0 \implies \nabla^2 u=0 \quad ; \quad \nabla^2=\frac{\partial 2}{\partial x^2}+\frac{\partial 2}{\partial y^2}$$

وكذلك يمكن البرهان على أن:

$$\frac{\partial 2v}{\partial x^2}+\frac{\partial 2v}{\partial y^2}=0 \implies \nabla^2 v=0$$

من أجل جميع نقاط المنطقة D.

نسمي المعادلتان السابقتان بمعادلة لابلاس التفاضلية الجزئية في المتحولين المستقلين x,y ويسمى التابعان u,v بالتابعين التوافقيين.

تعريف:

نقول عن التابعين u,v أنهما توافقيان في المنطقة D إذا كان $f(z)=u+iv$ تابعاً تحليلياً في المنطقة D . كذلك إذا كان $f(z)=u+iv$ تابعاً تحليلياً عندئذٍ نقول عن التابعين u,v أنهما متوافقان ومترافقان (كلمة مرافق مختلفة تماماً عن مرافق عدد عقدي z الذي يرمز له بـ $\bar{z}$).

ملاحظة:

إذا علم أحد التابعين المتوافقين المترافقين فإنه يمكننا معرفة الآخر وذلك باستخدام شرطي كوشي–ريمان.

مثال(1): برهن أن التابع $u(x,y)=y^3-3x^2y$ توافقي، ثم أوجد مرافقه التوافقي:

الحل:

$$\frac{\partial 2u}{\partial x^2}=-6y \quad , \quad \frac{\partial 2u}{\partial y^2}=6y$$

ومنه:

$$\frac{\partial 2u}{\partial x^2}+\frac{\partial 2u}{\partial y^2}=0$$

أي أن التابع يحقق معادلة لابلاس، ولمعرفة مرافقه التوافقي نعلم أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy$$

لكن حسب كوشي–ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy$$

بمكاملة العلاقة السابقة بالنسبة لـ y باعتبار x ثابت نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-6xy \quad \Longrightarrow \quad v=-3xy^2+\varphi(x) \ \ldots\ldots(*)$$

حيث $\varphi(x)$ تابعاً اختيارياً للمتحول x. لكن بما أن:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}$$

باشتقاق العلاقة(*) بالنسبة للمتحول x نجد:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-3y^2+\dot{\varphi}(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=-3y^2+3x^2$$

بذلك نجد:

$$\dot{\varphi}(x)=3x^2 \quad \Longrightarrow \ \varphi(x)=\ x^3+\mathrm{c}$$

بالتالي فالتابع المرافق الموافق لـ u:

$$v=-3xy^2+x^3+\mathrm{c}$$

كما أن التابع الموافق $f(z)=u+iv$ هو:

$$f(z)=y^3-3x^2y+i(-3xy^2+x^3)+ic$$
$$=\mathrm{i}(-\mathrm{i}y^3+i3x^2y-3xy^2+x^3)+ic$$

$$= \mathrm{i}\big((x+iy)(x+iy)^2\big) + ic$$
$$i(z^3 + c)$$

مثال(2): برهن أن التابع $u(x,y) = e^x \sin y + x^2 - y^2 + 6x - y$ توافقي ثم أوجد الدالة v بحيث يكون $f(z) = u + iv$ تحليلي.

الحل:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y + 2x + 6 \quad , \quad \frac{\partial 2u}{\partial x^2} = e^x \sin y + 2$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = e^x \cos y - 2y - 1 \quad , \quad \frac{\partial 2u}{\partial y^2} = -e^x \sin y - 2$$

ومنه:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial 2u}{\partial x^2} + \frac{\partial 2u}{\partial y^2} = 0 \implies$$

بالتالي u توافقي.

حسب كوشي–ريمان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \sin y + 2x + 6$$
$$\implies v = -e^x \cos y + 2xy + 6y + \varphi(x)$$

بما أن:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \to -e^x \cos y + 2y + \dot{\varphi}(x) = -e^x \cos y + 2y + 1$$
$$\implies \dot{\varphi}(x) = 1 \implies \varphi(x) = x + c$$
$$\implies v = -e^x \cos y + 2xy + 6y + x + c$$

ومنه:

$$f(z) = u + iv = (e^x \sin y + x^2 - y^2 + 6x - y) + i(-e^x \cos y + 2xy + 6y + x + c)$$
$$= -ie^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y) + (x^2 - y^2 + 2xyi) + 6x - y + 6yi + ix + ic$$
$$= -ie^x e^{iy} + (x^2 - y^2 + 2xyi) + 6(x + yi) + i(iy + x) + ic$$
$$= -ie^z + z^2 + 6z + iz + ic$$
$$= z^2 + 6z + i(-e^z + z + c)$$

مسألة(1): برهن أن التابع $u(x,y) = e^x \cos y$ توافقي ثم عين مرافقه التوافقي v، والتابع التحليلي $f(z) = u + iv$.

مسألة(2): برهن أن التابع $u(x,y) = e^{-z}(x\sin y - y\cos y)$ توافقي ثم عين مرافقه التوافقي v، بحيث يكون التابع $f(z) = u + iv$ تحليلياً ثم اكتب $f(z)$ بدلالة z.

==========

التكامل العقدي

i. تعاريف أساسية:

1) المنحني المستمر:

المنحني المستمر هو مجموعة النقاط $z = (x,y)$ حيث أن:

$$z = x(t) + iy(t) \quad , \quad a \le t \le b$$

x(t), y(t) : تابعان للمتحول الحقيقي t مستمران على المجال [a,b].

فإذا كان هناك قيمتان لـ t مثل t1 , t2 يقابلهما قيمة واحدة لـ z أي:

$$x(t_1) = x(t_2) \ , \ y(t_1) = y(t_2)$$

تدعى هذه النقطة بالنقطة المضاعفة للمنحني المستمر.

2) منحني جوردان:

هو بالتعريف المنحني المستمر الذي ليس فيه نقاط مضاعفة. أما إذا كان للمنحني المستمر نقطة مضاعفة وحيدة وهي طرفا المنحني أي إذا كان:

$$x(a) = x(b) \ , \ y(a) = y(b)$$

فإن المنحني في هذه الحالة يسمى بمنحني جوردان البسيط المغلق.

3) المنحني الموجه:

المنحني الموجه هو منحني جوردان موجه إما باتجاه تزايد قيم الوسيط t ونرمز له بـ Γ.

ونرمز له بـ Γ- للمنحني الموجه باتجاه تناقص قيم الوسيط t

إذا كان $\Gamma: Z(t) = x(t) + iy(t)$ حيث $a \le t \le b$ فإن:

$-\Gamma: Z(t) = x(a+b-t) + iy(a+b-t)$ حيث $a \le t \le b$

مثال(3):

التابع $Z(t) = r(\cos t + i\sin t)$ يمثل الدائرة $\Gamma: |z| = r$

نلاحظ أن:

$$Z(0) = r \ , \ Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = ir \ , \quad Z(\pi) = -r \quad , \quad Z(2\pi) = r$$

فالاتجاه الموجب على Γ هو بعكس دوران عقارب الساعة.

إن:

$$-\Gamma:\ Z(t) = r(\cos(0 + 2\pi - t) + i\sin(0 + 2\pi - t))$$
$$= r\cos t - ir\sin t\ \ ;\quad 0 \le t \le 2\pi$$

والاتجاه الموجب على $\Gamma-$ يوافق اتجاه دوران عقارب الساعة.

4) المنحني المنتظم

إذا قسمنا المجال [a ,b] إلى عدد من المجالات الجزئية بحيث يكون في كل مجال جزئي التابعين $x = x(t)$, $y = y(t)$ حيث $a \le t \le b$ مشتقات مستمرة ولا تنعدم بآن واحد فإننا نسمي المنحني منحنياً منتظماً.

5) المنحني الأملس:

إن المنحني المنتظم المؤلف من أجزاء صغيرة في كل جزء منها يكون التابعان $x = x(t)$, $y = y(t)$ قابلين للاشتقاق، كما أن مشتقيهما $x'(t)$, $y'(t)$ مستمران ويسمى كل جزء بمنحني أملس وطوله يعطى بالمعادلة:

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt$$

حيث: $x = x(t)$, $y = y(t);\ t_1 \le t \le t_2$

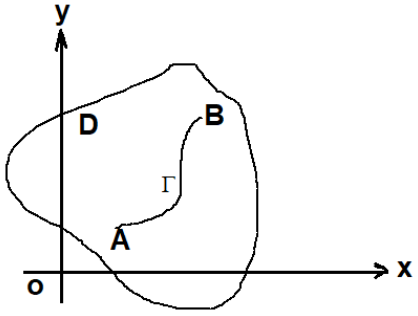
ii. التكامل العقدي:

ليكن لدينا $W = f(z) = u + iv$ تابعاً عقدياً مستمراً معرفاً على منطقة D من المستوي العقدي، ليكن Γ منحنياً أملساً طوله محدد L ويقع بأكمله داخل المنطقة D بدايته النقطة A ونهايته النقطة B معادلته:

$$Z = Z(t) = x(t) + iy(t)\ \ ;\ \ a \le t \le b$$

بفرض أن الاتجاه الموجب على Γ يطابق تغير t من a إلى b.

$A = Z(a)$, $B = Z(b)$



تكامل التابع $W = f(z)$ على طول المنحني Γ يعرف بالشكل التالي:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (\mathrm{u} + \mathrm{iv})(dx + idy) = \int_a^b f[Z(t)].\dot{Z}(t).dt$$

مثال(4): احسب التكامل

$$\int_C \frac{dz}{z - z_o}$$

حيث c دائرة مركزها z_o ونصف قطرها r أي $C: |z - z_o| = r$

الحل:

من معادلة الدائرة:

$$z = z_o + re^{i\theta} \;\; ; \;\; r > 0 \;, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ومنه: $dz = ire^{i\theta}d\theta$

بالتالي فإن:

$$\int_C \frac{dz}{z - z_o} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}} = i\int_0^{2\pi} d\theta = i2\pi$$

مثال(5): احسب التكامل

$$\int_C \frac{dz}{(z - z_o)^{n+1}}$$

حيث c دائرة مركزها z_o ونصف قطرها r أي $C: |z - z_o| = r$ و n عدد صحيح لا يساوي 1-

الحل:

من معادلة الدائرة:

$$z = z_o + re^{i\theta} \;\; ; \;\; r > 0 \;, \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

ومنه: $dz = ire^{i\theta}d\theta$

$$\int_C \frac{dz}{(z - z_o)^{n+1}} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}d\theta}{r^{n+1}e^{i\theta(n+1)}} = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta n}d\theta$$

عندما: $n = 0$ فإن:

$$\int_C \frac{dz}{(z - z_o)^{n+1}} = \int_C \frac{dz}{z - z_o} = i2\pi$$

أما إذا كانت $n \neq 0$ فإن:

$$\int_C \frac{dz}{(z - z_o)^{n+1}} = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} e^{-i\theta n}d\theta = \frac{i}{r^n}\int_0^{2\pi} (\cos n\theta - i\sin n\theta)d\theta$$

$$= \frac{i}{r^n}\left[\frac{\sin n\theta}{n} + i\frac{\cos n\theta}{n}\right]_0^{2\pi} = 0$$

أي:

$$\int_C \frac{dz}{(z-z_o)^{n+1}} = \begin{cases} i2\pi\ ; & n = 0 \\ 0\ ; & n \neq 0 \end{cases}$$

مثال(6): احسب قيمة التكامل

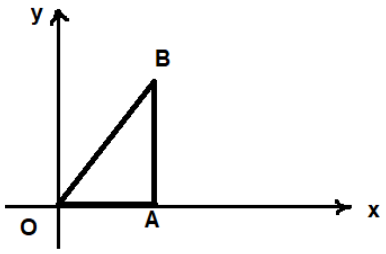
$$\int_\Gamma z^2 dz$$

حيث Γ المنحني المؤلف من المستقيمين AB, OA حيث إحداثيات النقاط هي:

$$O(0,0)\ , A(1,0)\ , B(1,2)$$

ثم احسب التكامل نفسه على طول المستقيم OB.

الحل: OA: y=0 , AB: x=1



$$\int_\Gamma z^2 dz = \int_\Gamma (x+iy)^2(dx+idy)$$

$$= \int_{OA} (x+iy)^2(dx+idy) + \int_{AB} (x+iy)^2(dx+idy)$$

$$= \int_{OA} x^2 dx + \int_{AB} (1+iy)^2(idy) = \int_0^1 x^2 dx + i\int_0^2 (1+iy)^2 dy$$

$$= \frac{1}{3} + i\left(-\frac{2}{3} + 4i\right) = -\frac{1}{3}(11+2i)$$

طريقة ثانية:

من معادلة المستقيم OB:

$$y = 2x$$

بفرض $t = x \rightarrow y = 2x = 2t\ ; t = 0 \rightarrow t = 1$

$$z = x + iy = t + 2it$$

بما أن:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (\mathrm{u} + \mathrm{iv})(dx + idy) = \int_a^b f[Z(t)].\dot{Z}(t).dt$$

$$\int_{OB} f(z)dz = \int_0^1 (t+2it)^2(1+2i)dt = \int_0^1 (-11t^2 - 2it^2)dt$$

$$= \left(-\frac{11}{3}t^3 - \frac{2}{3}it^3\right)_0^1 = -\frac{1}{3}(11+2i)$$

مثال(7): احسب قيمة التكامل

$$I = \int_{\Gamma} (z^2 + 3z)dz$$

حيث Γ هو الربع الموجب من $|z| = 2$

$$z = 2e^{i\theta} \;\; ; \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

ومنه: $dz = 2ie^{i\theta}d\theta$

$$I = \int_{\Gamma} (z^2 + 3z)dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4e^{2i\theta} + 6e^{i\theta}\right)2ie^{i\theta}d\theta$$

$$= 4i\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2e^{3i\theta} + 3e^{2i\theta}\right)d\theta$$

$$= 4i\left[\frac{2}{3i}e^{3i\theta} + \frac{3}{2i}e^{2i\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3}e^{i\frac{3\pi}{2}} + 6e^{i\pi} - \frac{8}{3} - 6$$

$$= \frac{8}{3}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{3\pi}{2}\right) + 6(\cos\pi + i\sin\pi) - \frac{8}{3} - 6$$

$$= -\frac{8}{3}i - 6 - \frac{8}{3} - 6 = -\frac{44}{3} - \frac{8}{3}i$$

مسألة(3): احسب قيمة التكامل

$$\int_{\Gamma} (\bar{z})^2 dz$$

حيث Γ المنحني المؤلف من المستقيمين AB, OA حيث إحداثيات النقاط هي:

$$O(0,0)\ , A(1,0)\ , B(1,2)$$

ثم احسب التكامل نفسه على طول المستقيم OB.

==========